Algebra de Boole

- Dos elementos: **0** y **1**
- Tres operaciones básicas: producto (·) suma (+) y negación (‘)
- Propiedades. Siendo a, b, c números booleanos, se cumple:
  - Conmutativa de la suma: $a + b = b + a$
  - Conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a$
  - Asociativa de la suma: $a + (b + c) = (a + b) + c$
  - Asociativa del producto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
  - Elemento neutro de la suma (0): $a + 0 = a$
  - Elemento neutro del producto (1) : $a \cdot 1 = a$
  - Distributiva del producto respecto de la suma: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
  - Distributiva de la suma respecto del producto: $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
  - Elemento complementario para $\mathbf{a}$ es $\overline{\mathbf{a}}$ y se cumple:
    - » $a + \overline{a} = 1$
    - » $a \cdot \overline{a} = 0$

Teoremas del álgebra de Boole

Siendo a, b, c números booleanos se cumple:

- Idempotencia: $a = a + a$ y $a = a \cdot a$
- Los elementos 0 y 1 cumplen: $a + 1 = 1$ y $a \cdot 0 = 0$
- Ley de absorción: $a + a \cdot b = a$
- Teorema de morgan (dos formas)
  - Primera forma: $\overline{(a + b + c + \ldots\ldots)} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots$
  - Segunda forma: $\overline{(a \cdot b \cdot c \cdot \ldots\ldots)} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

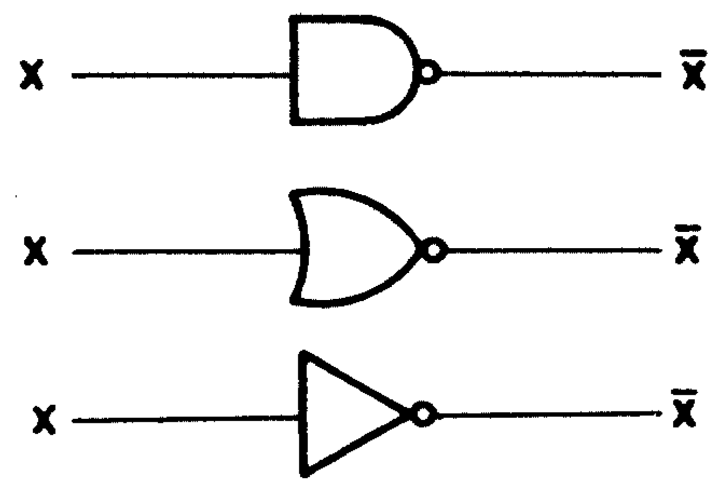
Funciones booleanas básicas (NOT)

- Función NOT (inversora): la salida es la complementaria de la entrada

Tabla de verdad

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

símbolos



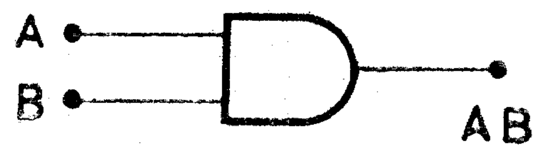
Funciones booleanas básicas (AND)

- Función AND (producto). La salida es 1 si y sólo si todas las entradas son 1

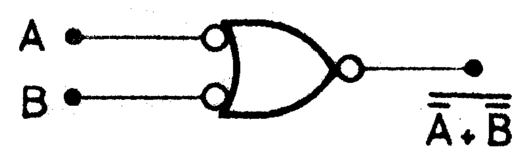
Tabla de verdad

a	b	ab
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

símbolo (normal)



símbolo (morgan)



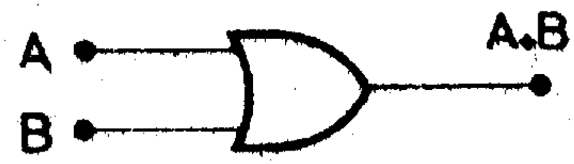
Funciones booleanas básicas (OR)

- Función OR (suma). La salida es 1 si cualquiera de las entradas es 1

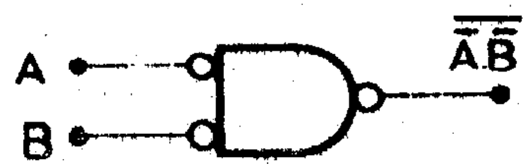
Tabla de verdad

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

símbolo (normal)



símbolo (morgan)



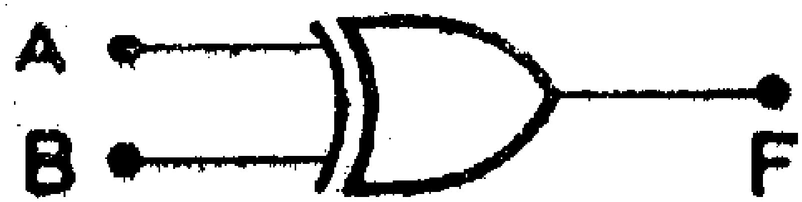
Funciones booleanas básicas (XOR)

- Función XOR (suma exclusiva). La salida es 1 si una entradas es 1 y la otra 0

Tabla de verdad

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

símbolo



Funciones de varias variables

- Una función booleana es una variable cuyo valor depende del valor de otras variables booleanas
- Una función está completa−mente especificada si a cada una de las combinaciones de las variables de entrada le corres−ponde un único valor de la función (salida)
- La tabla de verdad de una función booleana sirve para representarla. En ella se indica el valor 0 o 1 que toma la función para cada combinación de las variables de entrada. La tabla de verdad permite saber si dos funciones son equivalentes

Ejemplo de tabla de verdad

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Representación de funciones por su forma canónica

- Una función se representa como una suma de productos o como un producto de sumas
- Se denomina *término canónico* al término (producto o suma) en el que entran todas las variables
- El número máximo de términos canónicos de una función de n variables es 2^n
- Los productos canónicos se denominan minitérminos y las sumas canónicas se denominan maxitérminos
- Cuando una función se expresa en forma de minitérminos o maxitérminos se dice que está en forma canónica (sin simplificar)

Obtención de funciones a partir de la tabla de verdad

- Para representar la función en forma de minitérminos (en forma de productos) se cogen las combinaciones de entrada para las que la función toma valor **1** y se sustituyen los **1** en la variable de entrada por la variable y los **0** por la variable negada.

- Para representar la función en forma de maxitérminos (en forma de sumas) se cogen las combinaciones de entrada para las que la función toma valor **0** y se sustituyen los **1** en la variable de entrada por la variable negada y los **0** por la variable sin negar.

$$f(a,b,c) = \overline{a}\,\overline{b}c + a\overline{b}\,\overline{c} + ab\overline{c} + abc$$

$$f(a,b,c) = (a+b+c)(a+\overline{b}+c)(a+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}+\overline{b}+c)$$

Simplificación de funciones lógicas

- Por métodos algebraicos: basado en la propiedad distributiva y en el elemento complementario
  - $a \cdot X + \overline{a} \cdot X = X$
  - $(a + X)(\overline{a} + X) = X$
- Por el método de Karnaugh, para funciones de pocas variables
- Pro el método de Quine−McCluskey, para funciones de más de 5 variables o soluciones algorítmicas.

Método de simplificación de Karnaugh

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd$$

ab\cd	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	0

Método de simplificación de Karnaugh

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd$$

ab\cd	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	0

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}bd + a\bar{b}d$$

Método de simplificación de Quine−McCluskey

- Simplificación:
  - Dos números son simplificables cuando se diferencian sólo en un bit
  - Se simplificarán pares de números en niveles contíguos de la tabla
  - Al simplificar dos números, todos los dígitos quedan iguales menos el que es distinto que desaparece (se sustituye por una X)

Nº de unos	
0	0
1	1,2,4,8,...
2	3,5,6,9,10,12,....
3	7,11,13,14,.....
4	15,.....

- Pasos
  - Se hacen todos los pares posibles entre los números de niveles contíguos
  - Se eliminan los pares repetidos
  - Se incluyen los pares que no han entrado en ninguna combinación
  - Se vuelve a hacer la tabla
  - Se repite, hasta que no se puedan hacer más combinaciones
  - De las combinaciones que quedan hay que ver cuales no son esenciales

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd$$

Nº de unos	1ª tabla	2ª tabla
0	0000	000X, 0X00, X000
1	0001, 0100, 1000	0X01, X001, 010X, 100X
2	0101, 1001	01X1, 10X1
3	0111, 1011	

Nº de unos	3ª tabla
0	0X0X, X00X, ~~0X0X, X00X~~
1	
2	01X1, 10X1
3	

$\bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$

$\bar{a}bd + a\bar{b}d$

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}c\bar{d} + ab\bar{c}d + abcd$$

Nº unos	1ª tabla	2ª tabla
0	0000	000X, 00X0, X000
1	0001, 0010, 1000	0X01, X001, X010, 100X, 10X0
2	0101, 1001, 1010	01X1, X101, 1X01
3	0111, 1101	X111, 11X1
4	1111	

Nº unos	3ª tabla
0	X00X, X0X0
1	XX01
2	X1X1

$$f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{d} + \bar{c}d + bd$$

Hay términos que no son necesarios

	OOOO	OOO1	OO1O	O1O1	O111	1OOO	1OO1	1O1O	11O1	1111
XOOX	–	–				–	–			
XOXO	–		–			–		–		
XXO1		–		–			–		–	
X1X1				–	–				–	–

XOOX y X1X1 son esenciales

$$f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + \bar{c}d + \bar{b}d$$

Vale cualquiera

$$f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{c} + \bar{c}d + \bar{b}d$$